Μάθημα 9ο 18/03/16

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 1

ΑΣΚΗΣΗ 1

$GL(2, \mathbb{Q})$

$o\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$o\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$o\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = o\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \infty$

Με επαγωγή $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$o\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \infty$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow o(A) = \infty$

$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -A = (-1)A$

$o(-A) = \infty$

ΑΣΚΗΣΗ 2

$$A=\left\{ \underset{I}{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}, \underset{g}{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}}, \underset{-I=f^2}{\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}}, \underset{f^2g}{\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}}, \underset{f}{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}}, \underset{f^3}{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}}, \underset{fg}{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}, \underset{f^3g}{\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}} \right\}$$

$|A|=8$ και $A\leq GL(2,\mathbb{Q})$

Αρκεί η πράξη στο A να είναι καλά ορισμένη

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow O\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=O(f)=4$$

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=f^3$$

$O(g)=2$

$$f\cdot g=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=fg$$

$$f^2g=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$f^3g=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} f\cdot g&=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\ gf&=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} fg\neq gf$$

ΟΧΙ ΑΒΕΛΙΑΝΗ

Το σύνολο A με το γινόμενο των πινάκων αποτελεί ομάδα, υποομάδα της $Gl(2,\mathbb{Q})$
ΟΧΙ ΑΒΕΛΙΑΝΗ
Με δύο γεννήτορες (f,g) ώστε $O(f)=4$, $O(g)=2$ και $fg=gf^3$ και $f^2g=gf^2$
Δηλαδή $gf^ig=f^{-i}$
Αυτή είναι η διεδρική D_4, δηλαδή οι συμμετρίες ενός κανονικού τετραγώνου

ΑΣΚΗΣΗ 8:

$A\leq O$ και $B\leq K \Rightarrow A\times B\leq O\times K$
$A\times B\subseteq O\times K$ $(A\subseteq O$ και $B\subseteq K)$
• Η πράξη είναι καλά ορισμένη
(a,b) και (a',b') τυχαία του $A\times B$
Πρέπει $(a,b)(a',b')\in A\times B$
$(a,b)(a',b')=(aa',bb')\in A\times B$
$a,a'\in A$, $A\leq O\Rightarrow aa'\in A$
$b,b'\in B$, $B\leq K\Rightarrow bb'\in B$
• $\forall (a,b)\in A\times B\Rightarrow (a,b)^{-1}\in A\times B$
$(a,b)^{-1}=(a^{-1},b^{-1})\in A\times B$
$a\in A$, $A\leq O\Rightarrow a^{-1}\in A$
$b\in B$, $B\leq K\Rightarrow b^{-1}\in B$

ΕΡΩΤΗΜΑ: Όλες οι υποομάδες του $O\times K$ είναι της μορφής $A\times B$ με $A\leq O$ και $B\leq K$;;;
ΟΧΙ ΠΑΝΤΑ.

ΑΣΚΗΣΗ 3:

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$ δεν είναι κυκλική, δεν έχει στοιχείο τάξης οκτώ
$(2,4)\neq 1$
Να βρούμε όλες τις υποομάδες των $\mathbb{Z}_2$ και $\mathbb{Z}_4$
Όλες οι διακεκριμμένες υποομάδες μιας κυκλικής δίνονται από τους διαιρέτες της τάξης
$\mathbb{Z}_2$: $\langle[0]_2\rangle$, $\langle[1]_2\rangle=\mathbb{Z}_2$

$\mathbb{Z}_4$ $<[0]_4>$, $<[1]_4> = \mathbb{Z}_4$, $<[2]_4>$

Στην $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ $<[0]_2> \times <[0]_4>$

$<[0]_2> \times <[2]_4>$

$<[0]_2> \times \mathbb{Z}_4$

$\mathbb{Z}_2 \times <[0]_4>$

$\mathbb{Z}_2 \times <[2]_4>$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

$([1]_2, [2]_4)$

"Άλλες"

$O([1]_2, [2]_4) = 2$

$ΕΚΠ(2,2) = 2$

$<([1]_2, [2]_4)>$ υποομάδα που γεννάται από το, έχει τάξη 2

Η νέα υποομάδα $<([1]_2, [2]_4)>$ έχει τάξη 2 και δεν ταυτίζεται με αυτές που βρήκαμε τάξης 2. Άρα, είναι νέα.

Επίσης $<([1]_2, [1]_4)>$ έχει τάξη $ΕΚΠ(2,4) = 4$

Δεν ταυτίζεται με καμία από τις προηγούμενες. Νέα.

ΑΣΚΗΣΗ 4:

G αβελιανή

$Y = \{a \mid a^v = 1, a \in G\} \leq G$

όλα τα στοιχεία της G των οποίων η τάξη διαιρεί το v.

$Y \leq G$, Πράξη κλειστή.

Αντίστροφος.

$a, b \in Y$ (Άρα $a^v = 1 = b^v$) και να δείξω $ab \in Y \Leftrightarrow (ab)^v = 1 \overset{αβελ.}{\Leftrightarrow} a^v b^v = 1$ Ισχ

$a \in Y \Rightarrow a^{-1} \in Y$ $(a^v = 1 \Rightarrow (a^v)^{-1} = 1^{-1} = 1 \Rightarrow (a^{-1})^v = 1)$

ΑΣΚΗΣΗ 5:

$|O|<\infty$ και έχει μόνο την τετριμμένη, και τον εαυτό της, υποομάδες.
$1<|O|<\infty$
Έστω O κυκλική πεπερ.
Όλες οι υποομάδες της δίνονται από τους διαιρέτες του $|O|=n$
Από την υπόθεση το n διαιρείται μόνο από το 1 και το $n \Rightarrow n$ πρώτος
Έστω O όχι κυκλική $\Rightarrow \exists a, b \in O$ ώστε το b να μην είναι δύναμη του $a \Rightarrow$
$\langle a \rangle, \langle b \rangle \leq O$ Αδύνατο
Άρα, κάθε στοιχείο είναι δύναμη ενός $\Rightarrow O$ κυκλική

ΑΣΚΗΣΗ 6:

O ομάδα $a \in O$.
$Z(a)=\{b \in O \mid ba=ab\}$
κεντροποιητής του a.
$Z(a) \leq O$
$1, a \in Z(a) \neq \emptyset$
Πράξη κλειστή: $b, \gamma \in Z(a)$ $(ba=ab,\ \gamma a=a\gamma)$

$b\gamma a \overset{?}{=} ab\gamma$, $b\gamma a = ba\gamma = ab\gamma$

$b \in Z(a) \Rightarrow b^{-1} \in Z(a)$

$ba=ab \Rightarrow (ba)^{-1}=(ab)^{-1} \Rightarrow a^{-1}b^{-1}=b^{-1}a^{-1}$
$b^{-1}ba=b^{-1}ab \Rightarrow a=b^{-1}ab \Rightarrow ab^{-1}=b^{-1}abb^{-1} \Rightarrow ab^{-1}=b^{-1}a$

ΑΣΚΗΣΗ 7:

$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ κυκλική, όχι
$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\langle(u,v)\rangle$ με $uv\neq 0$
$m(u,v)=(mu, mv)$, $m\in\mathbb{Z}$

$(2\kappa, \nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{Z}$ με $(2\kappa, \nu) = \ell(\kappa, \nu)$

$2\kappa = \ell\kappa \Rightarrow \ell = 2$

$\nu = \ell\nu \Rightarrow \ell = 1$ ΑΤΟΠΟ.

$\kappa\nu \neq 0$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Η A της άσκησης 2 έχει τάξη 8 και είναι μη-αβελιανή. $|\mathbb{Z}_2 \times A| = 16$ μη-αβε

$A \cong D_4$

$\Sigma_\nu = \{ f \; \{1, 2, \ldots, \nu\} \xrightarrow{\text{"1-1"}} \{1, 2, \ldots, \nu\} \}$

μεταθέσεις

$$f \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & \nu \\ f(1) & f(2) & f(3) & \ldots & f(\nu) \end{pmatrix}$$

κύκλος $(a_1, a_2, \ldots, a_\kappa)$ έχει τάξη κ

Κάθε μετάθεση f γράφεται σαν γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους $\Rightarrow o(f) = $ ΕΚΠ

Κάθε κύκλος γράφεται σαν γινόμενο άρτιου ή περιττού αριθμού αντιμεταθέσεων αποκλειστικά

$\Rightarrow$ Κάθε μετάθεση σέβεται την ίδια ιδιότητα

A_ν εναλλάσσουσα υποομάδα

$A_\nu = \{$ όλες οι άρτιες $\} \leq \Sigma_\nu$

$$|A_\nu| = \frac{|\Sigma_\nu|}{2}$$

Σ_{10} $\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $\mu \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Να βρεθούν οι μεταθέσεις και οι τάξεις τους $\tau\sigma$, $\tau^2\sigma$, $\mu\sigma^2$, $\sigma^{-2}\tau$, $\sigma^{-1}\tau\sigma$

$O(\sigma^{100})$, $O(\tau^{100})$

$\sigma\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,4,5,6,2) \Rightarrow O(\sigma)=6$

$\mu\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (1,5)(3,4) \Rightarrow O(\mu) = 2$

$\tau\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1,2,4,3)(5,6) \Rightarrow O(\tau) = 4$

$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{\sigma}_{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (4,6)$

$\tau\sigma = (1,2,4,3)(5,6)(1,3,4,5,6,2) = (4,6) \Rightarrow O(\tau\sigma) = 2$

$O(\sigma^{100}) = O(\sigma^4)$, $100 = 16\cdot 6 + 4$

$\sigma^{100} = (\sigma^6)^{16}\sigma^4 = \sigma^4$

$O(\sigma^4) = \dfrac{O(\sigma)}{(4, O(\sigma))} = \dfrac{6}{(4,6)} = \dfrac{6}{2} = 3$

$O(\tau^{100}) = 1 = \dfrac{O(\tau)}{(100, O(\tau))} = \dfrac{O(\tau)}{O(\tau)} = 1$

$\tau^{100} = (\tau^4)^{25} = 1$

$\sigma = (1,3,4,5,6,2)$

$\sigma^4 = (1,6,4)(3,2,5)$

$\tau^2\sigma = \tau(\tau\sigma) = (1,2,4,3)(5,6)(4,6) = (1,2,4,5,6,3)$

$O(\tau^2\sigma) = 6$

(Ασκηση μσ² :)

$\sigma^{-2} = \sigma^4$

$\sigma^{-1}\tau\sigma = \sigma^5\tau\sigma =$ HW

$\sigma^{-2}\tau = \sigma^4\tau =$ HW

$\sigma^{8^2} = 1 = \sigma^6$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $|A_\nu| = \frac{|\Sigma_\nu|}{2} = \frac{\nu!}{2}$

$\boxed{a^{-1}ba \text{ έχει τα ίδια όσο και το } b}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ $A_\nu \subseteq \Sigma_\nu \Rightarrow A_\nu$ πεπερασμένο

$A_\nu = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ όλες οι άρτιες μεταθέσεις.

Αρκεί ν.δ.ο. όλες οι περιττές είναι ακριβώς κ

Τότε $\kappa + \kappa = \nu!$

Εστω g περιττή $\to (1,2)g$ άρτια $\Rightarrow (1,2)g \in A_\nu \Rightarrow \exists\, i$ ώστε $(1,2)g = f_i$

Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούμε μια αντιστοιχία $\{\text{περιττές}\} \xrightarrow[\text{επί}]{\text{"1-1"}} \{\text{άρτιες}\} = A_\nu$

Εστω g, g' περιττές ώστε $(1,2)g = (1,2)g' \Rightarrow$

$(1,2)(1,2)g = (1,2)(1,2)g' \Rightarrow g = g' \Rightarrow$ "1-1"

Επί $\forall$ άρτια f_i, $\exists$ περιττή g ώστε $f_i = (1,2)g$

Αν πάρουμε $g = \underbrace{(1,2)f_i}_{\text{περιττή}} \Rightarrow (1,2)g = (1,2)(1,2)f_i = f_i$

ΕΠΙ

$\Rightarrow |A_\nu| = \frac{|\Sigma_\nu|}{2} = \frac{\nu!}{2}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ορίζεται η εξής απεικόνιση $\varphi: \Sigma_\nu \to \mathbb{Z}_2$, $\varphi(f) = \begin{cases} [0], & f \text{ άρτια} \\ [1], & f \text{ περιττή} \end{cases}$

$f \cdot g \in \Sigma_\nu$

άρτια άρτια

άρτια

$\varphi(f) = [0]$

$\varphi(g) = [0]$

$\varphi(f) + \varphi(g) = [0] + [0] = [0] = \varphi(f \cdot g)$

$f \cdot g \in \Sigma_\nu$ $\quad \varphi(f) = [1]$

$\underbrace{\text{περιττή} \quad \text{περιττή}}_{\text{άρτια}}$ $\quad \varphi(g) = [1]$

$\varphi(f) + \varphi(g) = [1] + [1] = [0] = \varphi(f g)$.

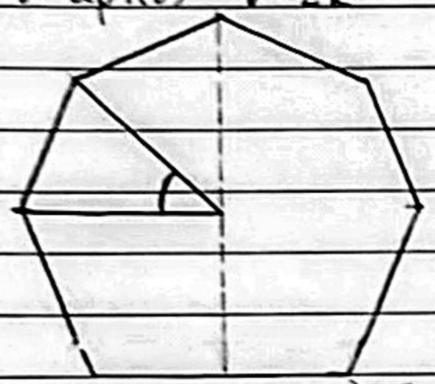
Βλέπουμε ότι ισχύει $\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) + \varphi(g)$

$\uparrow$ πράξη στη Σ_ν $\quad \uparrow$ πράξη στο $\mathbb{Z}_2$

Η φ σέβεται τις πράξεις $\Leftrightarrow$ φ **ομομορφισμός**

Η διεδρική ομάδα D_ν η οποία είναι υποομάδα της Σ_ν τάξης 2ν: $\underline{P_\nu}$ κανονικό ν-γων

- ν περιττός $\nu = 2\kappa+1$
- ν άρτιος $\nu = 2\kappa$



$\frac{2\pi}{7}$ στροφή f $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ κύκλος

συμμετρία g: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$

$= (2, 7)(3, 6)(4, 5)$

7-γωνο, όλες οι πλευρές ίσες

$f = (1, 2, 3, \ldots, \nu)$

$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & \kappa-1 & \kappa & \kappa+1 & \ldots & \nu \\ 1 & \nu & \nu-1 & \ldots & \underbrace{2\kappa+2-\kappa+1}_{\kappa+3} & & & & \end{pmatrix}$